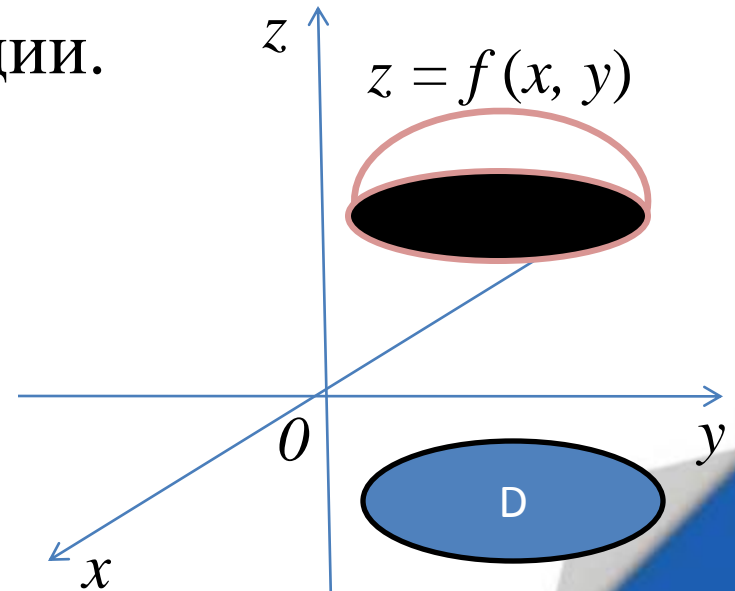


Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных



Основные понятия функции нескольких переменных

- Пусть каждой упорядоченной паре действительных чисел (x, y) из некоторой области $D \subset R_2$ соответствует определенное число z из области $E \subset R$, тогда функцию $z = f(x, y)$ называют **функцией двух переменных**, где x и y – независимые аргументы (переменные), D – область определения функции,
- E – множество значений функции.



- Число A называется **пределом функции** $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что из выполнения условий:

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{и} \quad 0 < |y - y_0| < \delta ,$$

следует, что $|A - f(x, y)| < \varepsilon$.

Предел функции двух переменных обозначается:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$$

- Функция $z = f(x, y)$ называется **непрерывной в точке** $M_0(x_0, y_0) \in D$, если выполняется условие

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0) = f(M_0).$$

- Функция, непрерывная во всех точках некоторой области называется **непрерывной в этой области**.
- *Замечание.* Все понятия, которые приведены в этом параграфе для функции двух переменных вводятся аналогично для функции многих переменных.

Частные приращения

функции двух переменных $z = f(x, y)$

- Частное приращение по оси Ox

$$\Delta z_x = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

- Частное приращение по оси Oy

$$\Delta z_y = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

Частные производные первого порядка функции двух переменных

- *Определение.* Предел отношения соответствующего частного приращения функции $z = f(x, y)$ к приращению соответствующего аргумента при стремлении этого приращения аргумента к нулю называют частной производной данной функции и обозначают:

$$a) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z_x}{\Delta x} = z'_x = \frac{\partial z}{\partial x};$$

$$á) \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta z_y}{\Delta y} = z'_y = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Способ нахождения частных производных функции $z = f(x, y)$

- Частная производная по переменной x находится в предположении, что:

x – переменная;
 y – константа
(действительное число).



- Частная производная по переменной y находится в предположении, что:

x – константа
(действительное число);
 y – переменная.

Геометрический смысл частных производных

- Геометрический смысл частных производных функции $z = f(x, y)$ формулируется аналогично функции одной переменной, но тангенс угла наклона касательной берется по отношению к соответствующей оси Ox или Oy .



Физический смысл частных производных

- Частная производная функции $z = f(x, y)$ по соответствующей переменной (x или y) в точке M_0 характеризует скорость изменения этой функции в данной точке в направлении соответствующей оси.

Полный дифференциал первого порядка функций двух и трех переменных

- Для функции двух переменных $z = f(x, y)$:

$$dz = z'_x dx + z'_y dy$$

Где dx и dy – это дифференциалы переменных;

dz – полный дифференциал функции.

- Для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$:

$$du = u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz$$

Где dx , dy , dz – это дифференциалы переменных;

du – полный дифференциал функции.

Частные производные и полные дифференциалы второго порядка функций двух и трех переменных

Для функции двух
переменных $z = f(x, y)$

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (z'_x)'_x;$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (z'_y)'_y;$$

$$z''_{xy} = z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (z'_x)'_y$$

$$d^2 z = z''_{xx} dx^2 + 2z''_{xy} dx dy + z''_{yy} dy^2$$

Для функции трех
переменных $u = f(x, y, z)$:

$$u''_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (u'_x)'_x; \quad u''_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (u'_y)'_y;$$

$$u''_{zz} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = (u'_z)'_z;$$

$$u''_{xy} = u''_{yx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (u'_x)'_y;$$

$$u''_{xz} = u''_{zx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = (u'_x)'_z;$$

$$u''_{yz} = u''_{zy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = (u'_y)'_z$$

$$d^2 u = u''_{xx} dx^2 + u''_{yy} dy^2 + u''_{zz} dz^2 + \\ + 2u''_{xy} dx dy + 2u''_{yz} dy dz + 2u''_{xz} dx dz$$

Производные функции нескольких переменных, заданных неявно

$$F(x, y) = 0$$

$$F(x, y, z) = 0$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}; \quad z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

- *Замечание.* Производные второго порядка функции, заданной неявно находятся с помощью последующего дифференцирования равенства, полученных для первой производной по соответствующей переменной.